11827

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2000 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2000 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2000

ශුද්ධ ගණිතය II
தூய கணிதம் II
Pure Mathematics II

05	
S	II

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න හතකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) $f(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ යැයි ද $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ යැයි ද ගනිමු.

$f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{O}$ යනු 2 වන ගණයේ ශූන්‍ය න්‍යාසය යි.

$f(1+i) = 0$ බව ද $(1+i)^6 = -8i$ බව ද සැලකිල්ලට ගෙන, $\lambda^6 \equiv f(\lambda)g(\lambda) + p\lambda + q$ වන පරිදි වූ, p සහ q තාත්වික නියත දෙකෙහි අගයයන් සොයන්න ; මෙහි $g(\lambda)$ යනු සුදුසු බහුපදයකි.

$\mathbf{A}^6 = 8\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ආ) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ න්‍යාසය, ද්විමානයේ ලක්ෂ්‍යවල T පරිණාමනය නිරූපණය කරයි.

(i) T යටතේ $(1, 2)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි ප්‍රතිබිම්බය,

(ii) T යටතේ ප්‍රතිබිම්බය ලෙස $(18, 2)$ ලැබෙන්නා වූ ලක්ෂ්‍යය,

සොයන්න.

T යටතේ කවර ලක්ෂ්‍ය අවිචලක වේ ද?

[පරිණාමනයක් යටතේ ලක්ෂ්‍යයක් අවිචලක යැයි කියනු ලබන්නේ එය එයට ම අනුරූපණය වුවහොත් ය.]

2. a, b යනු තාත්වික සංඛ්‍යා යයි සිතමු.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = (a-1)(b-1)(b-a) \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

(i) $$\Delta(x) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & x & 2x \\ k & x^2 & 4x^2 \end{vmatrix}$$

යැයි සිතමු ; මෙහි $k(\neq 2)$ යනු තාත්වික සංඛ්‍යාවකි. $x = 1$ යන්න $\Delta(x) = 0$ හි විසඳුමක් වන පරිදි වූ k සොයන්න.

k හි ඉහත අගය සඳහා, $\Delta(x) = 0$ විසඳන්න.

(ii) තාත්වික a සඳහා,

$$x + y + z = 1$$
$$x + ay + 2az = 1$$
$$x + a^2y + 4a^2z = 2$$

ඒකජ සමීකරණ පද්ධතියට, $a \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ නම් විසඳුමක් නොමැති බව පෙන්වා,

$a \notin \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ නම් අනන්‍ය විසඳුම සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා, ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශකර සාධනය කරන්න.

(i) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ නම්,

$z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$ බව සාධනය කරන්න; මෙහි $\theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$ වේ.

$\omega = \cos\phi + i\sin\phi$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $\omega^3 = i$ සපුරාලයි. $\omega^3 + \dfrac{1}{\omega^3} = 0$ බව පෙන්වන්න.

$\omega^3 + \dfrac{1}{\omega^3} = 0$ වන පරිදි වූ ϕ හි අගයයන් නිර්ණය කරන්න.

$\omega^3 = i$ සපුරාලන්නා වූ ω හි ප්‍රභින්න අගයයන් තුනක් අපෝහනය කරන්න.

(ii) ද මුවාවර් ප්‍රමේයය යොද,

$n \in \mathbb{Z}$ විට $\theta \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ සඳහා,

$$\frac{\cos 6\theta}{\cos^6\theta} = 1 - 15\tan^2\theta + 15\tan^4\theta - \tan^6\theta$$

බව පෙන්වන්න.

$$\tan^6\theta - 15\tan^4\theta + 15\tan^2\theta - 1 = 0$$

වන පරිදි වූ θ හි අගයයන් නිර්ණය කරන්න.

$x^3 - 15x^2 + 15x - 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල සැලකීමෙන්, $\tan\dfrac{\pi}{12}$ හි අගය ලබාගන්න.

4. $z_0 = \cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, ආගන්ඩ් රූප සටහනෙහි A ලක්ෂ්‍යයෙන් නිරූපණය වේ.

$\omega = \dfrac{\cos 3\pi}{7} + i\sin\dfrac{3\pi}{7}$ විට $p = \omega z_0$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවට අනුරූප P ලක්ෂ්‍යය සලකුණු කරන්න.

B සහ C යනු පිළිවෙළින් z_0^3 සහ z_0^9 ට අනුරූප ලක්ෂ්‍ය වන අතර Q සහ R මගින් පිළිවෙළින් q සහ r සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි ; මෙහි $q = \omega z_0^3$ සහ $r = \omega z_0^9$ වේ. B, C, Q සහ R ලක්ෂ්‍ය සලකුණු කර,

(i) $A\hat{O}C = B\hat{O}C$

සහ (ii) $AC = BC$

බව පෙන්වා, $A\hat{B}C$ හි අගය ලබාගන්න.

$\text{Arg}\left(\dfrac{q-p}{q-r}\right) = \dfrac{3\pi}{7}$ බව ද $z_0 + q + z_0^3 + p + z_0^9 + r$ සංඛ්‍යාව හුදෙක් අතාත්වික බව ද පෙන්වන්න.

5. (අ) O මූලයකට අනුබද්ධ ව, A, B, C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $-\mathbf{i}+(1+\sqrt{3})\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\sqrt{3}\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ සහ $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ වෙයි; මෙහි $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ට සුපුරුදු අර්ථය ඇත. A, B, C ඒක රේඛීය නොවන බව පෙන්වන්න.

(i) AB සහ AC හි දිග

(ii) BAC කෝණය

(iii) ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සහ A සහ BC අතර කෙටිම දුර

(iv) BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට A යා කෙරෙන රේඛාවේ දෛශික සමීකරණය

සොයන්න.

(ආ) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ පිහිටුම් දෛශික සහිත A, B, C, D ලක්ෂ්‍ය හතර ඒකතල වේ නම්, එවිට

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]+[\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}]=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d}]+[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}]$$

බව සාධනය කරන්න.

[මෙහි $[\mathbf{x}\,\mathbf{y}\,\mathbf{z}]$ යන්නෙන් ඕනෑ ම $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ දෛශික තුනක $\mathbf{x}\times\mathbf{y}\,.\,\mathbf{z}$ අදිශ ත්‍රිත්ව ගුණිතය හැඳින්වේ.]

6. (අ) $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{7}{24}\right)$ සහ $\beta=\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ යැයි දී ඇත්නම්, $\cos(\alpha-\beta)$ සොයා ඒ නයින් $\sin(\alpha-\beta)$ ගණනය කරන්න.

(ආ) $t=\tan x$ නම්, $\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2}$ බව පෙන්වන්න.

$(1+\sin 2x)(2-\tan x)=2$ වන පරිදි $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ප්‍රාන්තරය තුළ පිහිටි x හි අගයයන් සොයන්න.

(ඇ) $n\in\mathbb{Z}$ විට, $\theta\neq n\pi$ සඳහා,

$\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta=\cot\frac{\theta}{2}$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵලය යොදා, $\operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\operatorname{cosec}\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\operatorname{cosec}\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ හි අගය සොයන්න.

7. (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යයේ සිට $ax+by+c=0$ රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.

$ax+by+c_1=0$ සහ $ax+by+c_2=0$ සමාන්තර රේඛා අතර දුර $\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ බව අපෝහනය කරන්න.

A යනු $3x+4y=7$ රේඛාව මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ද B සහ C යනු $3x+4y=2$ රේඛාව මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය ද යැයි ගනිමු. මෙම ලක්ෂ්‍ය තුන පිහිටා ඇත්තේ,

(i) BC ට ලම්බ ව A හරහා යන රේඛාව $(-2,-3)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන පරිදි ද

(ii) AB රේඛාව $y+3x=0$ රේඛාවට සමාන්තර වන පරිදි ද

(iii) ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය 1 වන පරිද ද වේ.

A සහ B හි ඛණ්ඩාංක නිර්ණය කරන්න.

තව ද, C ලක්ෂ්‍යය සඳහා පිහිටුම් දෙකක් තිබිය හැකි බව පෙන්වා, එක් එක් අවස්ථාවේ දී C හි ඛණ්ඩාංක ලබා ගන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

8. $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ සහ $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ නම්, $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$ බව පෙන්වන්න.

$$\lambda(y-7x)y + \mu y(4y-4x+3) + (4y-4x+3)(y-7x) = 0$$

සමීකරණය වෘත්තයක් නිරූපණය කිරීම සඳහා λ හි සහ μ හි අගයයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, λ සහ μ හි එම අගයයන් සඳහා, මෙම සමීකරණය නිරූපණය කරනු ලබන්නේ,

$y=0$, $4y-4x+3=0$ සහ $y-7x=0$ සමීකරණ මගින් පිළිවෙළින් OA, AB සහ BO පාද දෙනු ලබන OAB ත්‍රිකෝණයේ S පරිවෘත්තය බව පෙන්වන්න.

O සහ A හි දී S වෘත්තය ප්‍රලම්බ ව ඡේදනය කරනු ලබන වෘත්තයේ සමීකරණය ලබාගන්න.

9. (අ) $x = t^2 - 1$ සහ $y = t^3 - t$ පරාමිතික සමීකරණ වලින් දෙනු ලබන C වක්‍රය සලකන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$.

C වක්‍රය එයින්ම ඡේදනය වන (x, y) ලක්ෂ්‍ය සියල්ල, වීජීය ක්‍රමයකින් හෝ ජ්‍යාමිතික ක්‍රමයකින් හෝ සොයන්න.

$t > 0$ විට, C වක්‍රය උඩු අතට අවතල බව පෙන්වන්න.

(ආ) ධ්‍රැවක ආකාරයෙන්, පිළිවෙළින් $r = 2a\cos(\theta - \alpha)$ සහ $r = \lambda\sec(\theta - \alpha)$ සමීකරණවලින් දෙනු ලබන C_1 සහ C_2 වක්‍ර දෙක විස්තර කරන්න; මෙහි a සහ α ධන නියත වන අතර $\lambda(>0)$ යනු පරාමිතියකි.

$\lambda < 2a$ නම්, එවිට C_1 සහ C_2 වක්‍ර ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී එකිනෙක ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න. එම ලක්ෂ්‍ය P_1 සහ P_2 නම්, OP_1P_2 ත්‍රිකෝණයේ Δ වර්ගඵලය $\lambda\sqrt{2a\lambda - \lambda^2}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි O යනු ධ්‍රැවයයි.

ඒ නයින්, Δ සඳහා උපරිම අගයක් ගෙන දෙන λ හි අගය සොයන්න.

10. $y = mx + c$ රේඛාව, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සය ස්පර්ශ කරනු ලබයි නම්, එවිට $c^2 = a^2m^2 + b^2$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ, ඉහත ඉලිප්සයට $P(h, k)$ ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක යුගලයේ සමීකරණය

$$(kx - hy)^2 = a^2(y-k)^2 + b^2(x-h)^2$$

ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

P සිට ඇඳි ස්පර්ශක දෙක, Q සහ R ලක්ෂ්‍යවල දී x අක්ෂය ඡේදනය කරයි.

(i) QR හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $(\alpha, 0)$ අචල ලක්ෂ්‍යය නම්, P හි පථය $\alpha y^2 = b^2(\alpha - x)$ පරාවලය බව පෙන්වන්න.

(ii) PQ සහ PR ලම්බ නම්, P හි පථය ලබාගන්න.